Théorème de Korovkin et applications

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
— 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.
— 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Définition 1. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on dit qu'un opérateur $u \in \mathcal{L}(E)$ est positif si pour tout $f \in E$, $f \geq 0 \implies u(f) \geq 0$

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *En notant pour $k \in \mathbb{N}$, e_k l'application : $e_k : x \mapsto x^k$. Pour toute suite d'opérateurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$ positifs tel que la suite $(u_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e_k sur $[0,1]$ pour $k \in \{0,1,2\}$ alors pour toute fonction $f \in E$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Preuve : Commençons par une remarque préliminaire sur les opérateurs positifs,
Soit u un opérateur positif et $f, g \in E$ et tel que $f \leq g$ alors $g - f \geq 0$ donc $u(g-f) \geq 0$ par positivité de u et donc $u(g) \geq u(f)$ par linéarité de u.
Ainsi, comme pour tout $f \in E$, on a $-|f| \leq f \leq |f|$, on a $|u(f)| \leq u(|f|)$.
Passons maintenant à un lemme,

Lemme 1. *Soit $f \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c(y-x)^2$$

Preuve du lemme : Comme f est continue sur le compact $[0,1]$, f est uniformément continue d'après le théorème de Heine.
Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, A], |x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| \leq \eta$, tout c positif convient.
Si $|x-y| \geq \eta$, alors $\frac{(x-y)^2}{\eta^2} \geq 1$ et

$$|f(x) - f(y)| \leq 2||f||_\infty \leq \frac{2||f||_\infty}{\eta^2}(y-x)^2$$

donc $\forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \dfrac{2||f||_\infty}{\eta^2}(y-x)^2$ □

Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$

Étape 1 : Étudions la quantité $|u_n(f)(x) - f(x)|$ à $x \in \mathbb{R}$ fixé

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|u_n(f)(x) - f(x)| &= |u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x) + f(x)u_n(e_0)(x) - f(x)| \\ &\leq |u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)| + |f(x)||u_n(e_0) - 1|\end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}, n \geq n_i$ $u_n(e_i) - e_i$ est bornée et $||u_n(e_i) - e_i||_\infty \leq \varepsilon$. D'où

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq |u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)| + ||f||_\infty ||u_n(e_0) - e_0||_\infty$$

Il suffit donc de majorer le premier terme du membre de droite.

Étape 2 : Étudions la quantité $|u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)|$ à $x \in \mathbb{R}$ fixé

D'après le lemme, on a en fixant $x \in [0, 1]$, pour tout $y \in [0, 1]$

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + c(y^2 - 2xy + x^2)$$

d'où l'inégalité fonctionnelle :

$$|f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + c(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0)$$

En appliquant u_n, on a pour tout $y \in [0, 1]$:

$$|u_n(f) - f(x)u_n(e_0)| \leq \varepsilon u_n(e_0) + c(u_n(e_2) - 2xu_n(e_1) + x^2 u_n(e_0))$$

En évaluant cette égalité en $x \in \mathbb{R}$, on obtient l'inégalité

$$|u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)| \leq \varepsilon u_n(e_0)(x) + c(u_n(e_2)(x) - 2xu_n(e_1)(x) + x^2 u_n(e_0)(x))$$

Or, comme $u_n(e_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} e_k$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$ et que les fonctions e_1, e_2 sont bornés. Donc la fonction $(u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0))$ converge uniformément vers $e_2 - 2e_1e_1 + e_2 = 0$.
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)| \leq 2\varepsilon$.

Étape 3 : Conclusion

On a donc $u_n(f) - f$ est borné à partir d'un certain rang, et $||u_n(f) - f||_\infty \leq (2 + ||f||_\infty)\varepsilon$. Donc $(u_n(f))$ converge uniformément vers f.

□

Application. *Soit (B_n) la suite d'opérateurs définies par :*

$$\forall f \in E, x \in [0, 1], B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}$$

alors pour toute fonction $f \in E$, $(B_n(f))$ converge uniformément vers f.

Preuve : (B_n) est une suite d'opérateurs positifs avec

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = 1 = e_0(x)$$

Afin de calculer $B_n(e_1)$ et $B_n(e_2)$ (qui peut s'avérer calculatoire), remarquons que

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, B_n(e_k)(x) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{n}\right)^k\right] \text{ où } X_n \simeq \mathcal{B}(n, x)$$

D'où

$$B_n(e_1)(x) = \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right] = \frac{nx}{n} = e_1(x)$$

et

$$\begin{aligned} B_n(e_2)(x) = \mathbb{E}\left[\frac{X_n^2}{n^2}\right] &= \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{Var}(X_n) + \mathbb{E}[X_n]^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(nx(1-x) + (nx)^2\right) \end{aligned}$$

D'où $(B_n(e_2))$ converge uniformément vers e_2.

D'après le théorème de Korovkin, pour toute fonction $f \in E$, $(B_n(f))$ converge uniformément vers f. $\square$

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 2*. Cassini, 2009.